



Teachers' Inquiry in
Mathematics Education

Co-funded by the
Erasmus+ Programme
of the European Union



Studija nastavnog sata (Lesson Study)

Željka Milin Šipuš, Eva Špalj
PMF-MO, XV. gimnazija, Zagreb

25. ožujka 2022.

time-project.eu

The sole responsibility for the content of this presentation lies with the authors. It does not necessarily reflect the opinion of the European Union.

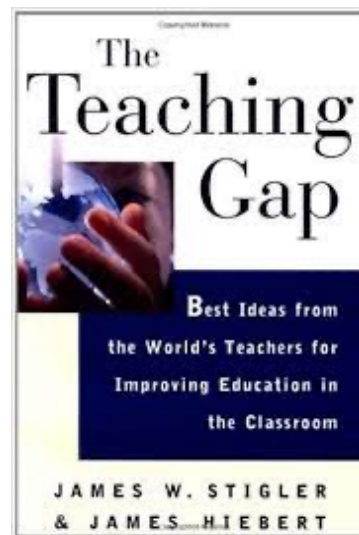
Prisjetimo se...



“Closing the gap...”



Svakodnevni
izazovi



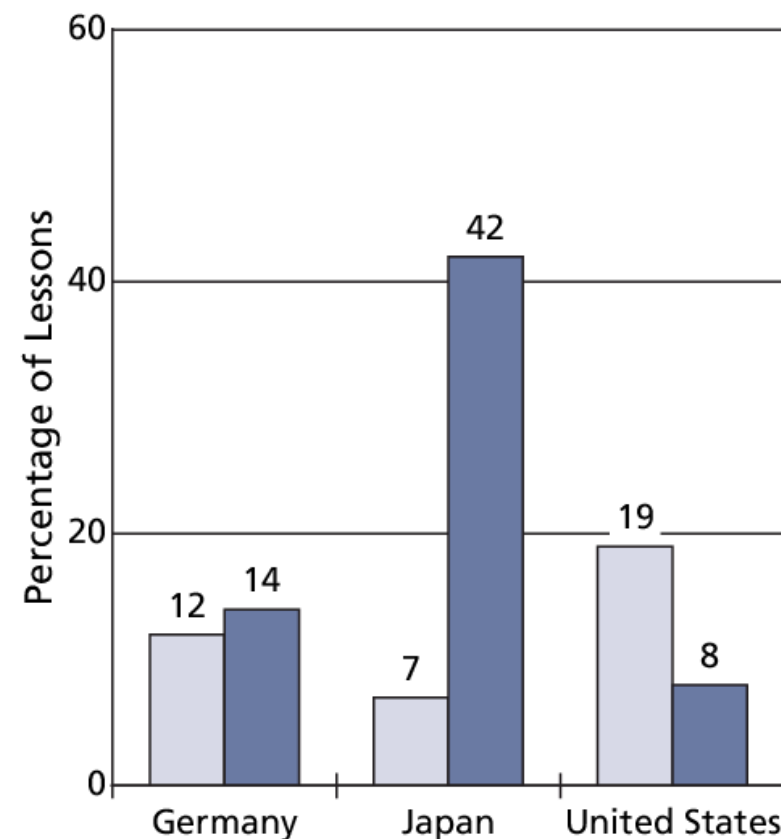
Idealna
situacija



“Closing the gap...”

“TIMSS video study (Japan, Germany, USA), 1999.”

- (a) **Postotak lekcija** koje su uključivale alternativne metode rješenja koje je prezentirao nastavnik i učenik
- b) Prosječan broj prezentiranih alternativnih metoda rješenja od strane nastavnika i učenika **po satu**



“Closing the gap...”



- Postoje velike varijacije među zemljama, ali **ne dominantno u vrstama postavljenih problema**
- Tj. vrste postavljenih problema ne objašnjavaju međunacionalne razlike u postignućima
- Videozapisi su otkrili nešto drugo zanimljivo:
 - način na koji su nastavnici podučavali i radili s učenicima
 - način na koji su nastavnici koristili probleme da bi poučavati koncepte

Drugim riječima, činilo se da je ključ leži u počavanju (teaching)!



“Closing the gap...”



Videozapisi su otkrili da se postignuća ostvaruju:

- Ne nužno korištenjem posebnih metoda
- ...već pronalaženjem načina za uključivanje učenika kako bi se oni uhvatili u koštac s matematičkim idejama (“hands-on”)
- **Postoji mnogo načina za učinkovito poučavanje**
- Svatko tko je promatrao sat matematike zna da se nastavnici mogu “angažirano” postaviti problem i promijeniti njegovu “prirodu” - **teaching**





“Closing the gap...” – ovo je poznato:

Zahtjevi na “drugačije” poučavanje - nastavnici moraju imati znanje:

- o domeni (na primjer, matematici)
- o školskoj matematici
- o tome kako učenici razmišljaju i uče o toj domeni.

Također moraju imati **vještine** primjene različitih metoda.

Stručno usavršavanje (PD)





“Closing the gap...” – razmislimo:

1. Pojedinačni tihi rad

Odvojite 2-3 minute za pojedinačno tiho promišljanje te:

- Razmislite o osobnom iskustvu rada u nastavničkim grupama. Kako su one funkcionirale? Zašto?
- Razmislite o tome kako ste Vi funkcionirali i ponašali se unutar tih timova:

Željeli ste biti sigurni, podržani, sučeliti argumente, da Vas se uvjeri,...

2. Podijelite svoja promišljanja u timu

Odvojite 5 minuta

3. Podijelimo promišljanja zajednički





“Closing the gap...” – Lesson study (LS)

Lesson study = Studija nastavnog sata

- Projekt Mist, SAD, od 2011.
- „**Što je potrebno da bi se podržala poboljšanja kvalitete poučavanja (a time i učenja učenika) u velikim skupinama?**“ (Cobb i sur., 2018.),
- Pratilo se nastavnike 360.000 učenika (2007.-2011.),
- Kasnije su se uključile i uprave škola s 180.000 učenika (2011.-2015.).
- Zaključili su da je, kada je u pitanju razvoj nastavne prakse, **LS je najperspektivniji način osiguranja kontinuiranog stručnog usavršavanja**





“Closing the gap...” – Lesson study (LS)

Lesson study = Studija nastavnog sata

- Oblik stručnog usavršavanja nastavnika u Japanu
- **Zajednički rad nastavnika** na nekom “problemu u poučavanju”
- Nastavnici **nastoje poboljšati poučavanje** tretirajući ga kao predmet proučavanja, pažljivim proučavanjem onoga “što radi” i što “ne radi”
- ... u smislu poboljšanja kvalitete učenja učenika





“Closing the gap...” – Lesson study (LS)

Timska **studija nastavnog sata (LS)** – kultura “mi”:

- LS se zasniva na pretpostavci da **svaki učenik može naučiti**
- **Svaki član nastavničkog** tima donosi “svoju perspektivu” učenja
- Uključuju se i “**vanjski stručnjaci**”
- LS pruža mogućnost (čak i stručnjacima) postavljati i istraživati pitanja što je učenje i poučavanje
 - Zbog toga smo danas i **mi ovdje!**





“Closing the gap...” – Lesson study (LS)

Načela **studija nastavnog sata (LS)**

- Nastavnici najbolje uče i unapređuju svoju praksu **opservirajući** druge nastavnike kako poučavaju
- Od **iskusnih učitelja** posebno se očekuje da svoja znanja i iskustva podijele s kolegama
- Iako se može činiti da je fokus na učitelju, konačni **fokus je na kultiviranju interesa učenika i na kvaliteti njihovog učenja**
- Postoji upadljiva sličnost između **LS kao aktivnosti za nastavnike i iskustva u učenika u IBMT**
- = učenje istraživanjem problema putem eksperimentiranja ispitujući moguća rješenjima





“Closing the gap...” – Lesson study (LS)

Kroz LS promičemo:

1. Stav o učenju i poučavanju

- LS se zasniva na pretpostavci da svaki učenik može naučiti

2. Predanost kolektivnom rastu

- Kako drugačije?

3. Naglasak na učenju, a ne na evaluaciji nastavnika

- Ovo je najlakše prihvatiti
- Promičemo i stav prema učeniku (*ne lovim njegove pogreške!* – gdje je tu prostor za rast?, svi učimo na pogreškama!)



LS u Japanu



Oshihara Elementary School, Japan, Lesson Study 2012. (Source: www.apmreports.org, Photo: Tom McDougal)

Lesson Study

- nije metoda ni teorijski okvir
- koristi se već više od stoljeća (PD)
- nastavnici imaju predviđeno radno vrijeme za sudjelovanje u svojoj školi i prilagođen raspored
- često putuju na zajedničke velike LS, čak i na nacionalnoj razini
- u fokusu je rješavanje problema



LS u SAD



<https://lessonresearch.net/teaching-problem-solving/ttp-in-action/>

1. Mock up Lesson 0-2 min
2. Lesson 1-3 min
3. Alan Schoenfeld 0-2 min
4. Akihiko Takahashi 0-5 min

4	How do mathematicians add fractions with unlike denominators (Teacher: Alex Johansen-Laughlin)	Unit Plan	Watch Mock Up Lesson Watch Lesson Watch Comments by Alan Schoenfeld Watch Comments by Akihiko Takahashi Watch Students share about their journal work
---	---	-----------	---



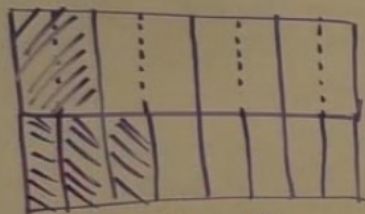
Lekcija (4. razred OŠ): How do mathematicians add fractions with unlike denominators



- Priprema za sat
- Npr. preporuka o modelima, kako ih crtati
- Preporuka o korištenju ploče (iako je lijepo imati sve na ploči, ovdje je važno da svi učenici vide što je napisano i nacrtano)



Guadalupe's idea



$$\frac{1}{4} = \frac{2}{8}$$

$$\frac{3}{8}$$

$$\frac{1}{4} + \frac{3}{8} = ?$$

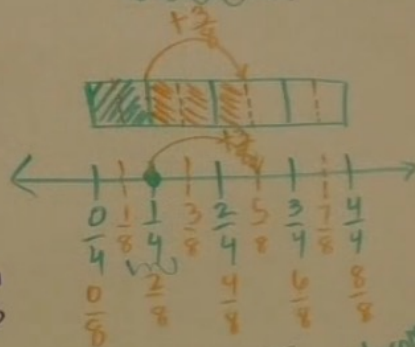
$\left(\frac{1}{4}\right)$

$$\frac{2}{8} + \frac{3}{8} = \frac{5}{8}$$

Alonso ran $\frac{5}{8}$ of a mile.

"I changed the fourths to eighths"

Javier's idea



$$\frac{1}{4} + \frac{3}{8} = \frac{5}{8}$$

$$\frac{1}{4} = \frac{1 \times 2}{4 \times 2} = \frac{2}{8}$$

$$\frac{2}{8} + \frac{3}{8} = \frac{5}{8}$$

"decompose the unit fractions on number line"

Oto's idea

$$\frac{1}{4} + \frac{3}{8} = ?$$

$$\frac{1}{4} = \frac{1 \times 2}{4 \times 2} = \frac{2}{8}$$

$$\frac{1}{4} = \frac{2}{8}$$

"I multiplied $\frac{1}{4} \times \frac{2}{2}$ to create an equivalent fraction"

$$\frac{2}{8} + \frac{3}{8} = \frac{5}{8}$$

Summary: Today, we learn to add unlike fractions using a common denominator to get the sum.

Reflection: At first, I was confused. My smart friend helped me. I need to practice more. The next time, I will be faster.

Alan Schoenfeld



NEKI NAGLASCI

- Speaking respectfully, hearing each other, posing question in the appropriate academic discourse...
- 5 dimensions of mathematically powerful classroom:
 - **Mathematics**
 - **Cognitive demand**
 - **Access to mathematical content**
 - **Agency, authority, identity**
 - **Use of assessment**





Alan Schoenfeld

NEKI NAGLASCI

On Mathematics

- Beauty / danger of mathematics is that you can strip context and operate on numbers mindlessly
- Kids saying: I've got this context and I will **represent**... but I'm not going to lose the context because I will go back to it...

On cognitive dimension

- How do you know where the kids are struggling?
- If one kid is confused with something, there are others that are too





Alan Schoenfeld

NEKI NAGLASCI

On Access to Mathematics

- You can never judge on one lesson
- Who participates, how are they encouraged to participate,...
- ... different opportunities give kids opportunities to shine in different ways

On Agency, authority, identity

- A lot of kids came up with ideas
- ...persevere





Alan Schoenfeld

NEKI NAGLASCI

On Assessment

- How does a lesson meet kids where they are?
- Why did you do this or that?





Akihiko Takahashi

- **The goal of the lesson was not to get the answer on the task**
- **...but to find out how to add fractions with unlike denominators**
- ... and that was students' task also
- Alex is a secondary school teacher. She does not teach in this way. Kids do not “come with that mathematics by themselves”!
- ... talented teachers – come more with their colleagues (11:23)
- Students' names on the whiteboard with their approaches, very important!
- Writings on the whiteboard like kind of scaffolding
- **Good classroom management is establishing good collaborative framework, not just controlling fear**





- Video iz Danske (Jacob Bahn, Carl Winsløw, Britta Jessen):

<https://m.youtube.com/watch?v=0eFJ2miTf1g>





HVALA!

time-project.eu

The sole responsibility for the content of this presentation lies with the authors. It does not necessarily reflect the opinion of the European Union.

Co-funded by the
Erasmus+ Programme
of the European Union





Teachers' Inquiry in
Mathematics Education

Co-funded by the
Erasmus+ Programme
of the European Union



Ciljevi, faze i uloge u studiji nastavnog sata

Eva Špalj

PMF-MO, XV. gimnazija, Zagreb

24. lipnja 2020.

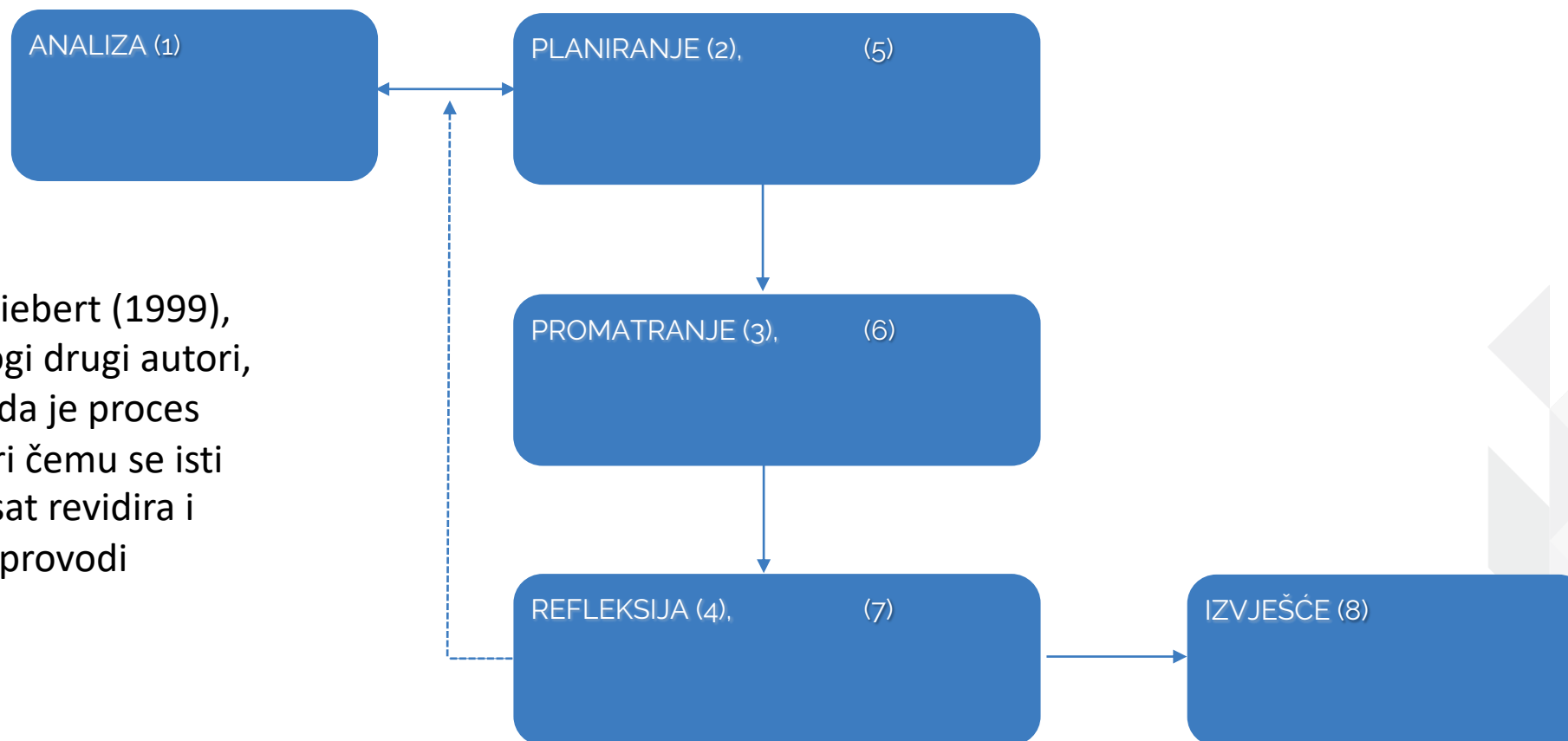
time-project.eu

The sole responsibility for the content of this presentation lies with the authors. It does not necessarily reflect the opinion of the European Union.

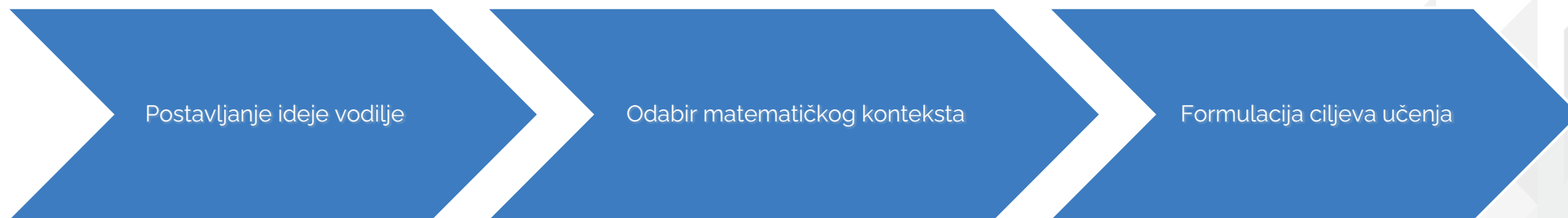
Faze



Stigler i Hiebert (1999),
kao i mnogi drugi autori,
smatraju da je proces
ciklički, pri čemu se isti
nastavni sat revidira i
ponovno provodi



Analiza / Odabir problema i ciljeva učenja



Primjeri ideje vodilje



Različiti ciljevi



Učenici samostalno definiraju matematičke pojmove.



Promatranje

Temeljno pravilo prilikom promatranja je da ne smije ometati poučavanje.

U fokusu promatrača je učenikovo učenje u odnosu na ciljeve učenja.

Različite tehnike promatranja se razvijaju kroz iskustvo, ali je važno pratiti:

- kako su učenici prihvatili primopredaju,
- koje aktivnosti poduzimaju,
- koje hipoteze formuliraju,
- kako se različiti učenici uključuju u potvrđivanje (validaciju).



Refleksija



Vanjski
stručnjak

Odabrani
nastavnik

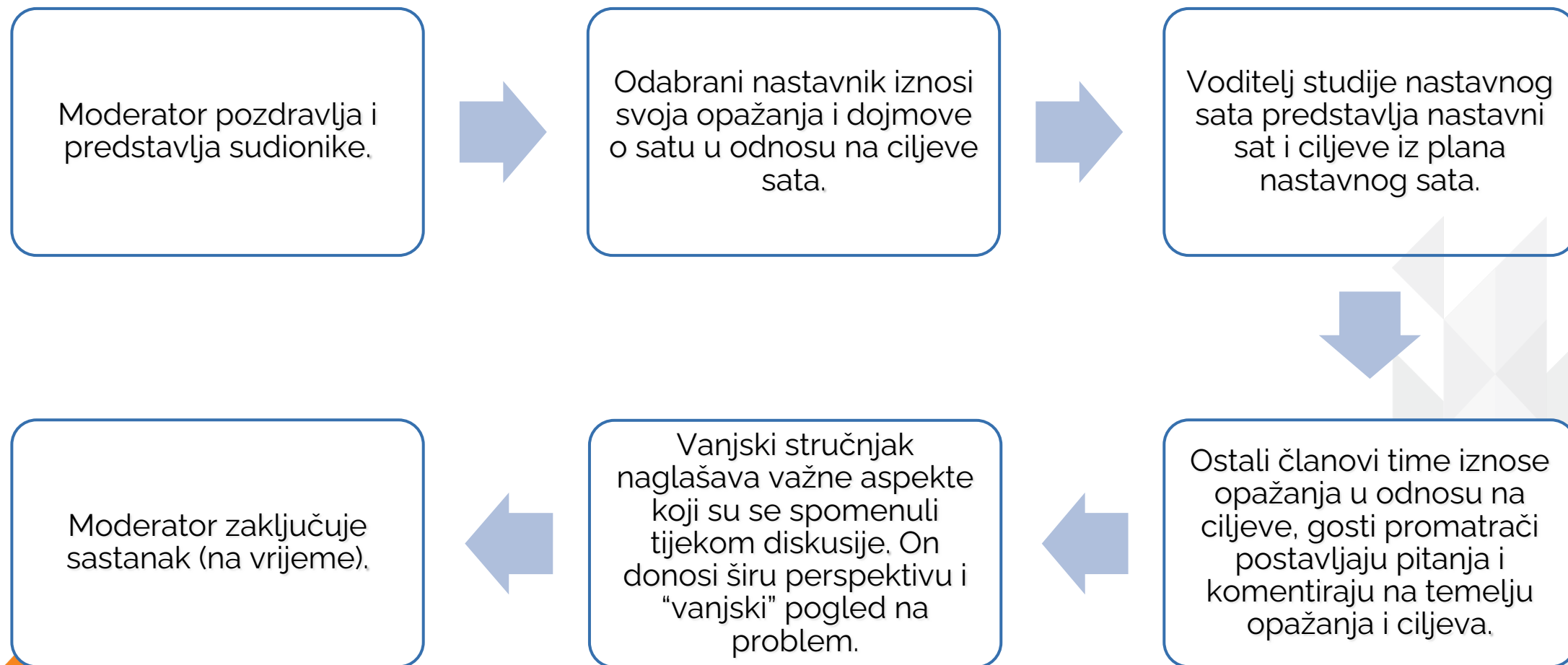
Voditelj studije
nastavnog
sata

Moderator

Promatrači



Refleksija



Izvještaji

- *Timovi izrađuju izvješća o svojim studijama nastavnih sati. Izvješća se čuvaju u školi i dostupna su ostalim nastavnicima. Neka se izvješća i objavljuju.*
- *Izvješće služi nastavnicima za učenje o svom učenju iz studija, kao i da prihvate i podijele svoje znanje*
- kod nas... Poučak, MiŠ...



Članovi tima i organizacija



Član tima	Uloga
Nastavnik	• provodi nastavni sat, najčešće u svom razredu • jedan od članova grupe • dobiva povratnu informaciju ostalih članova
Voditelj studije nastavnog sata	• organizira aktivnosti studije – istraživanje, diskusije i pisanje plana, te brine o paradidaktičkoj infrastrukturi (raspored, zamjene, rezervacija prostorije, poziv vanjskim promatračima) • drži fokus cijelog tima • tijekom diskusije prezentira studiju i podsjeća na glavne ideje u pozadini
Moderator	• domaćin promatračima i ostalim članovima tima • brine o uvjetima pod kojima promatrači sudjeluju na nastavnom satu • podsjeća na pravila i vodi diskusiju
Ostali članovi tima	• sudjeluju u planiranju nastavnog sata, izmjenjuju se u ulozi nastavnika • promatraju i sudjeluju u diskusiji, osiguravaju dodatnu perspektivu u procesu
Vanjski stručnjak	• pozvan od strane tima kako bi donio širu perspektivu i “vanjski” pogled • pažljivo prouči plan nastavnog sata, posljednji komentira u diskusiji, nastoji naglasiti važne aspekte koji su se spomenuli tijekom diskusije



LESSON STUDY = “TIMSKI”



Uloge u timu za provođenje LS:

- Nastavnik koji provodi sat
- Ostali članovi tima
- Voditelj LS
- Moderator u LS
- Vanjski stručnjak (external expert, “knowledgeable other”)



LESSON STUDY = “TIMSKI”



Uloge u timu cijelog LS:

- **Nastavnik koji provodi sat**
- **Ostali članovi tima**
 - **Voditelj LS**
 - **Moderator u LS**

Postoji voditelj tima koji:

- koordinira rad tima
- podupire stalni napredak grupe
- prvo treba dogovoriti način rada i pravila u timu – „we”
- prilikom planiranja nastave, teme diskusije su
**razmišljanja i učenje učenika,
a ne najprije razrada sata!**

- Vanjski stručnjak (external expert, “knowledgeable other”)



LESSON STUDY = “TIMSKI”



Unutar tima, možemo se dogovoriti i specifičnije, te uvesti uloge:

- **dnevni voditelj (facilitator)**, koji vodi grupu kroz dnevni red, potičući sudjelovanje svih članova
- **bilježnik**, koji bilježi i distribuira bilješke koje sažimaju raspravu i bilježenje odluke
- **snimatelj**, koji snima bilješke, crteže, grafikone, ploču...
- **mjeritelj vremena i pratitelj cijelog procesa**, koji aktivno nadzire norme tima i daje povratne informacije na kraju sastanaka
- **koordinator za logistiku**, koji šalje podsjetnik za sljedeće sastanke, organizira kavu itd.





HVALA!

time-project.eu

The sole responsibility for the content of this presentation lies with the authors. It does not necessarily reflect the opinion of the European Union.

Co-funded by the
Erasmus+ Programme
of the European Union





Teachers' Inquiry in
Mathematics Education

Co-funded by the
Erasmus+ Programme
of the European Union



Linearna regresija

Matija Bašić
PMF-MO, Zagreb
25. ožujka 2022.

time-project.eu

The sole responsibility for the content of this presentation lies with the authors. It does not necessarily reflect the opinion of the European Union.

VAŠA ISKUSTVA



- Kad ste se prvi put susreli s linearnom regresijom?
 - Jeste li ikad održali nastavni sat na ovu temu? Kakvi su dojmovi?
 - Što smatrate važnim istaknuti?
-
- Na koji način matematički istražujete novu temu?



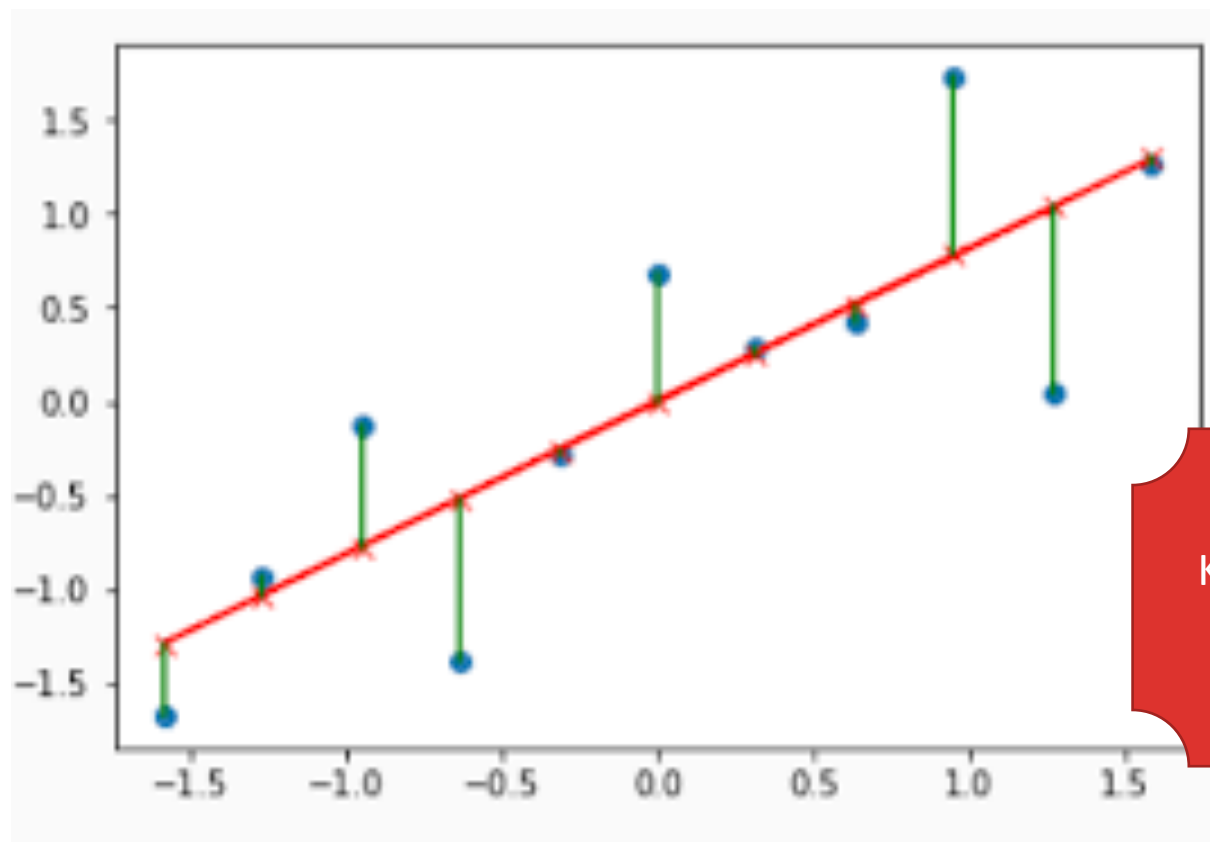
PROBLEM LINEARNE REGRESIJE



x	y
x_1	y_1
x_2	y_2
...	...
x_n	y_n

LINEARNI MODEL

$$f(x) = ax + b$$



KOJI PRAVAC
ODABRATI?



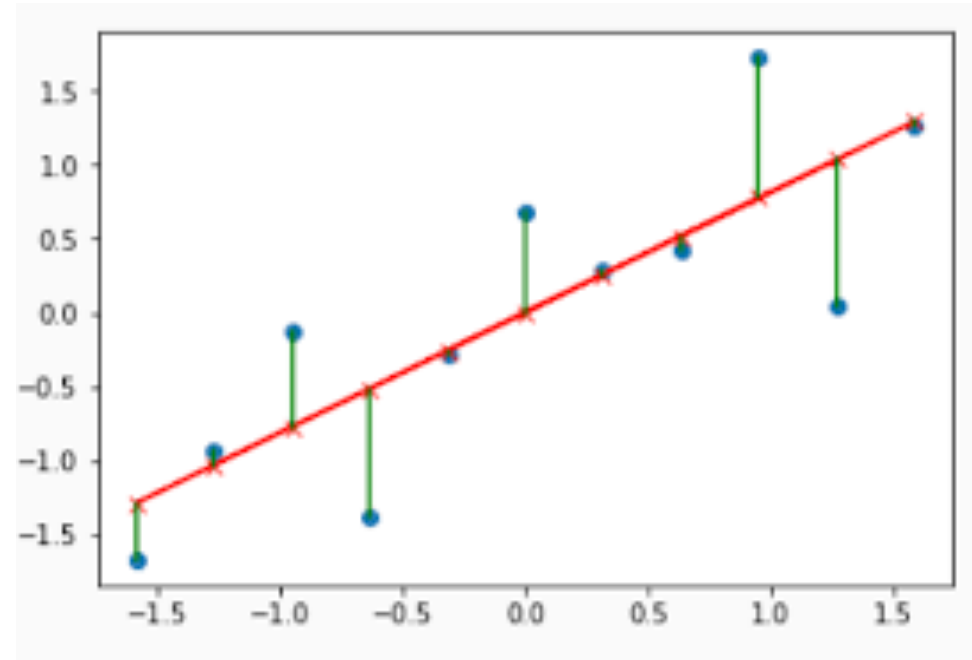
PRAVILO RAVNOTEŽE



$$ax_1 + b - y_1 + \dots + ax_n + b - y_n = 0.$$

$$f(\bar{x}) = \bar{y}, \quad a\bar{x} + b = \bar{y}$$

$$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n}$$





METODA NAJMANJIH KVADRATA

Tražena funkcija $f(x) = ax + b$
takva da je izraz

$$(ax_1 + b - y_1)^2 + \dots + (ax_n + b - y_n)^2$$

najmanji mogući.

Minimum tražimo izjednačavajući parcijalne derivacije s nulom
ili

primjenom pravila ravnoteže i određivanjem tjemena kvadratne funkcije
u varijabli a .



METODA NAJMANJIH KVADRATA



Uvrstimo li $b = \bar{y} - a\bar{x}$, dobivamo funkciju

$$F(a) = (ax_1 + \bar{y} - a\bar{x} - y_1)^2 + \dots + (ax_n + \bar{y} - a\bar{x} - y_n)^2$$

$$F(a) = a^2 \sum_i (x_i - \bar{x})^2 - 2a \sum_i (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y}) + \sum_i (y_i - \bar{y})^2$$

$$a = \frac{\sum_i (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sum_i (x_i - \bar{x})^2} = \frac{s_{x,y}}{s_x^2}$$



ZAŠTO METODA NAJMANJIH KVADRATA?



Zašto promatramo funkciju

$$F(a, b) = (ax_1 + b - y_1)^2 + \dots + (ax_n + b - y_n)^2$$

umjesto funkcije

$$G(a, b) = |ax_1 + b - y_1| + \dots + |ax_n + b - y_n|?$$



ZAŠTO METODA NAJMANJIH KVADRATA?

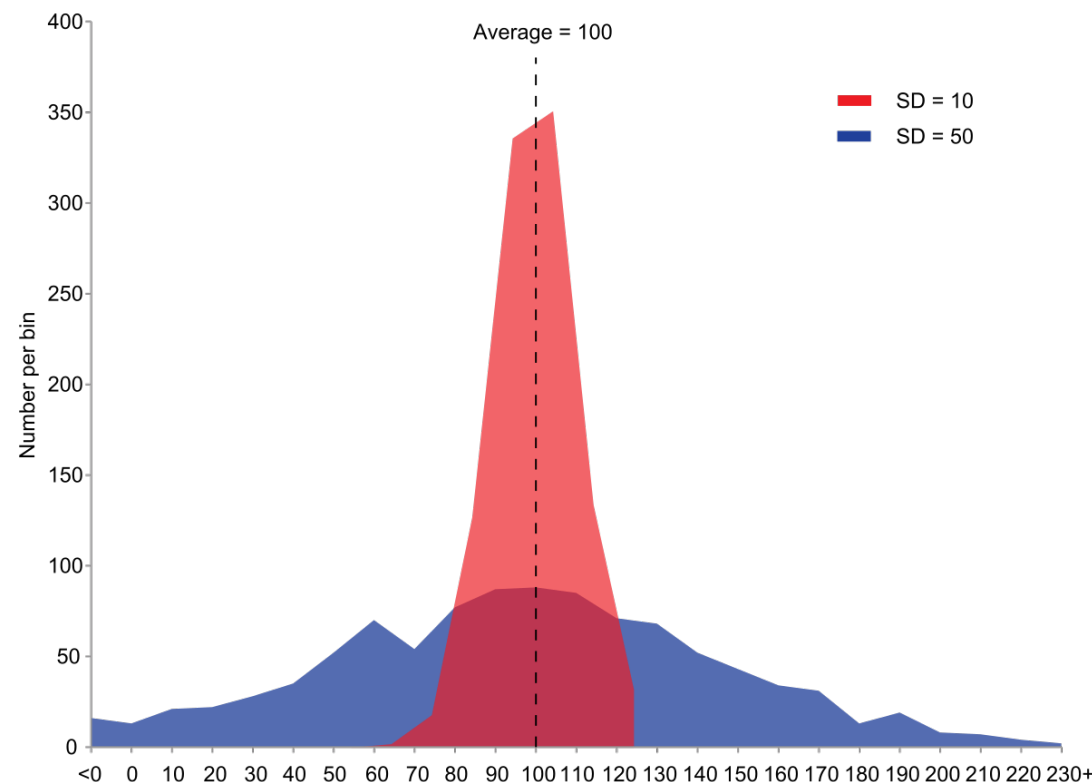


Uočite da je varijanca normalno distribuirane populacije

$$\sigma^2 = \frac{(x_1 - \mu)^2 + \dots + (x_n - \mu)^2}{n}$$

što možemo izraziti kao prosječno kvadratno odstupanje od prosjeka.

Pitanje je zapravo usko vezano uz razloge zašto kao mjeru raspršenosti promatramo **varijancu**.



ZAŠTO METODA NAJMANJIH KVADRATA (MNK)?

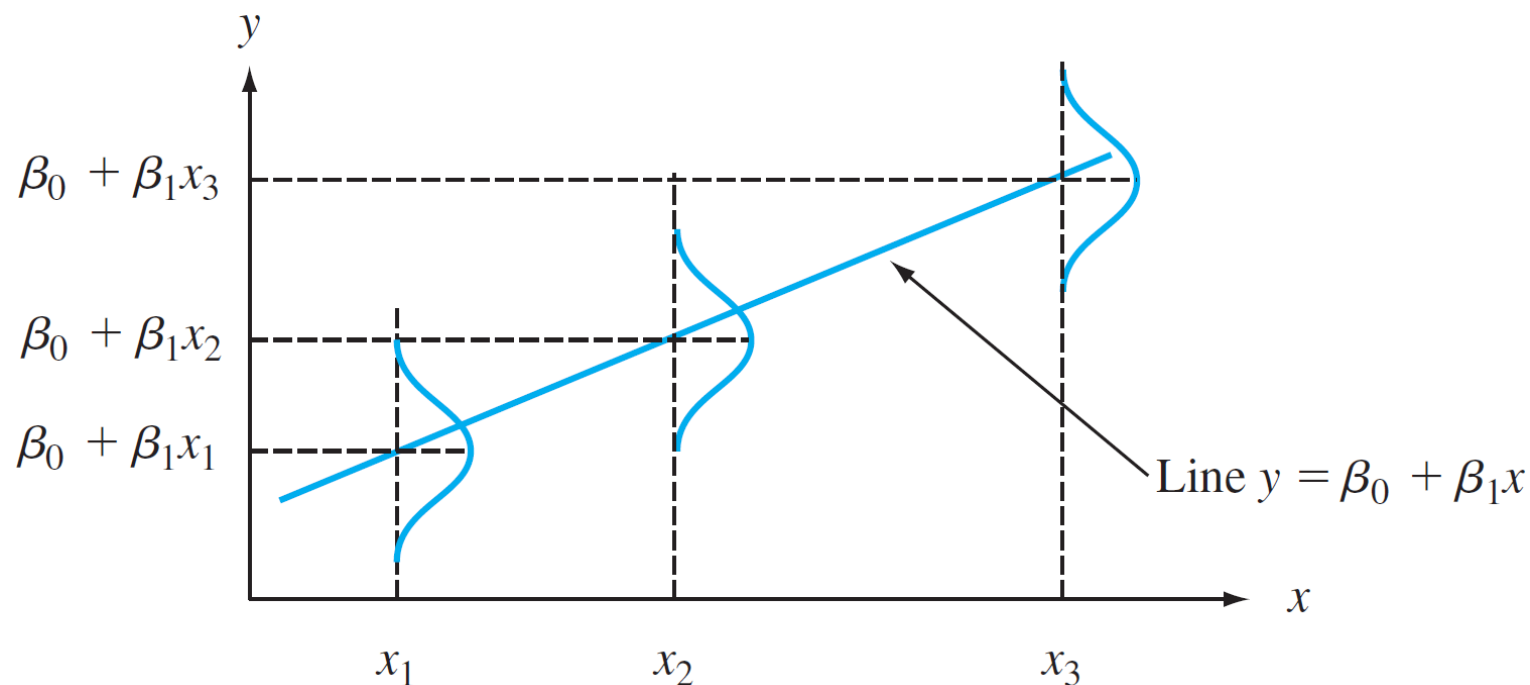


- Kvadratna funkcija je **derivabilna** u svim točkama domene, a apsolutna vrijednost nije
- *Prosjek* minimizira funkciju $f(x) = (x - x_1)^2 + \dots + (x - x_n)^2$
dok *medijan* minimizira funkciju $f(x) = |x - x_1| + \dots + |x - x_n|$
- Ako su X i Y nezavisne, vrijedi $\text{Var}(X+Y) = \text{Var } X + \text{Var } Y$ (posljedica Pitagore)
- Među raznim normama na $\mathbb{R}^n$, euklidska norma je jedina inducirana skalarnim produktom
- Prostor slučajnih varijabli s konačnom varijancom ima skalarni produkt koji je dan kovarijancom, a varijanca je norma



ZAŠTO METODA NAJMANJIH KVADRATA (MNK)?

- Ako su greške (tj. $Y - aX - b$) normalno distribuirane, onda će parametri linearnog modela *dobivenog MNK* također biti **normalno distribuirani** što omogućuje testiranje hipoteza o tim parametrima





Teachers' Inquiry in Mathematics Education

Co-funded by the
Erasmus+ Programme
of the European Union



Dizajn nastavnog sata

Matija Bašić
PMF-MO, Zagreb
26. ožujka 2022.

time-project.eu

The sole responsibility for the content of this presentation lies with the authors. It does not necessarily reflect the opinion of the European Union.

O1 TIME Lesson
Study Guide

O2 TIMEPlate

O3 TIME LS
Reports



O4 TIME Design
Compendium

O5 TIME Course
on design

O6 TIME
Scenarios

time-project.eu

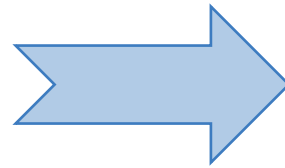
The sole responsibility for the content of this presentation lies with the authors. It does not necessarily reflect the opinion of the European Union.

Co-funded by the
Erasmus+ Programme
of the European Union





Mathematics Education -
Relevant, Interesting and Applicable



**Teachers' Inquiry in
Mathematics Education**

time-project.eu

The sole responsibility for the content of this presentation lies with the authors. It does not necessarily reflect the opinion of the European Union.

Co-funded by the
Erasmus+ Programme
of the European Union

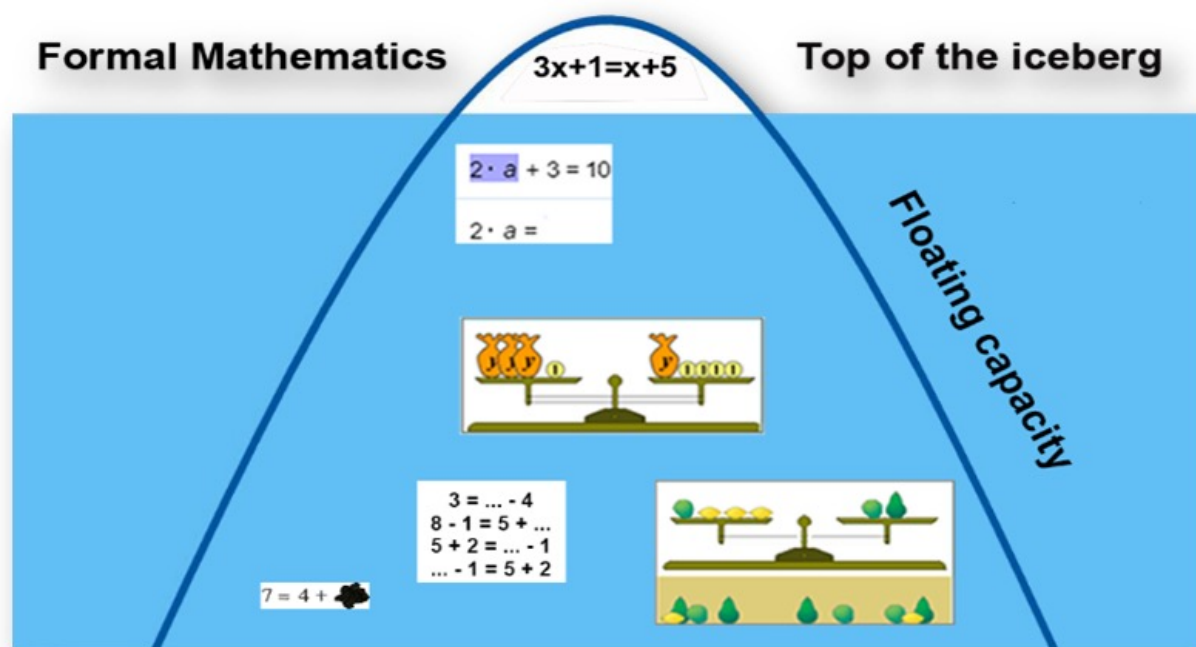




PRINCIPI U PROJEKTU MERIA - RMO

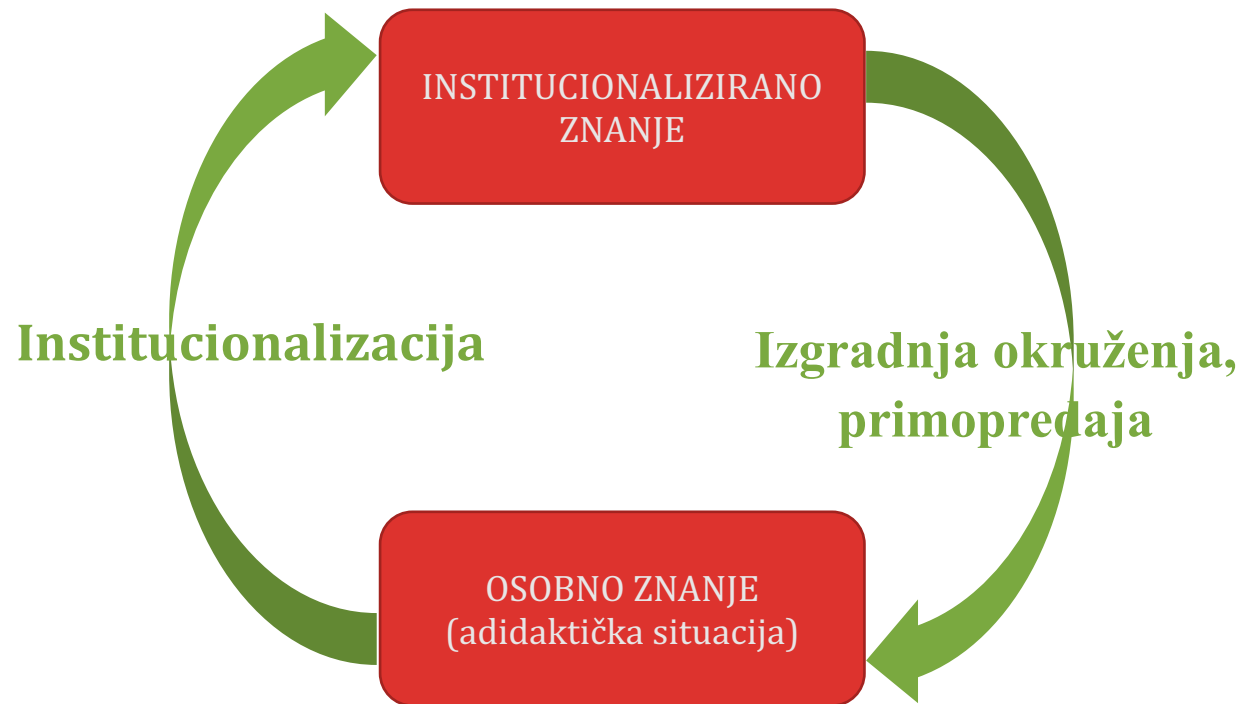
REALISTIČNO MATEMATIČKO OBRAZOVANJE

- matematika kao ljudska aktivnost
- vođeno otkrivanje
- bogati kontekst
- progresivna formalizacija
- izvirači modeli
- matematizacija





PRINCIPI U PROJEKTU MERIA - TDS



TEORIJA DIDAKTIČKIH SITUACIJA

- primopredaja odgovornosti
- adidaktično djelovanje
- formulacija
- potvrđivanje u didaktičkom okruženju
- uloga problema
- institucionalizacija



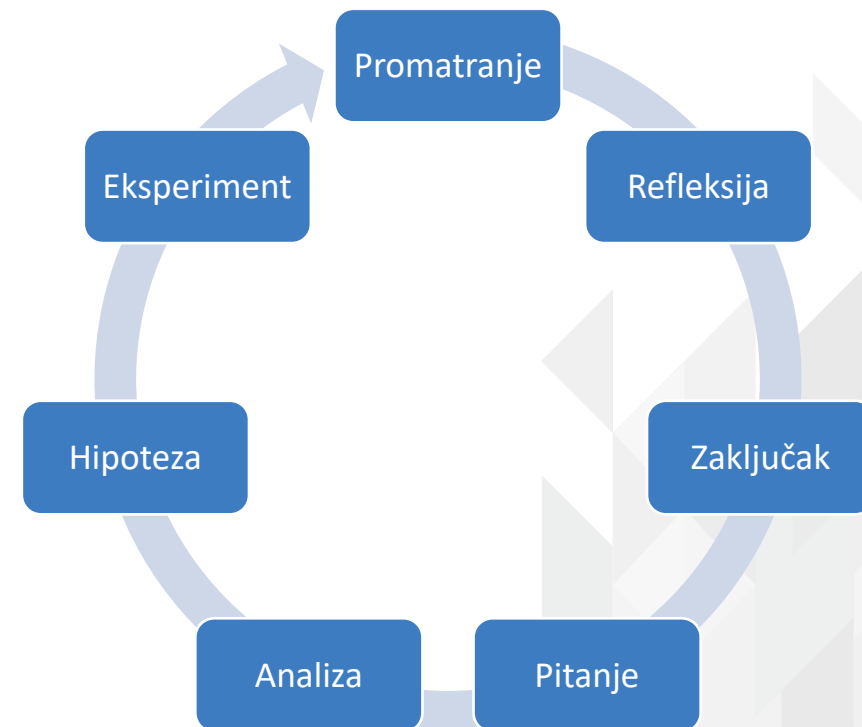
PRINCIP DIZAJNA



Princip dizajna je preporuka vezana za **karakteristike** nastavnog sata, problema, kurikuluma... koja uključuje **procedure i uvjete** uz koje se mogu postići karakteristike, bazirane **teoretskim i empirijskim argumentima**.

Van den Akker, 2013;

TIME Compendium for Designing IBME, 2022



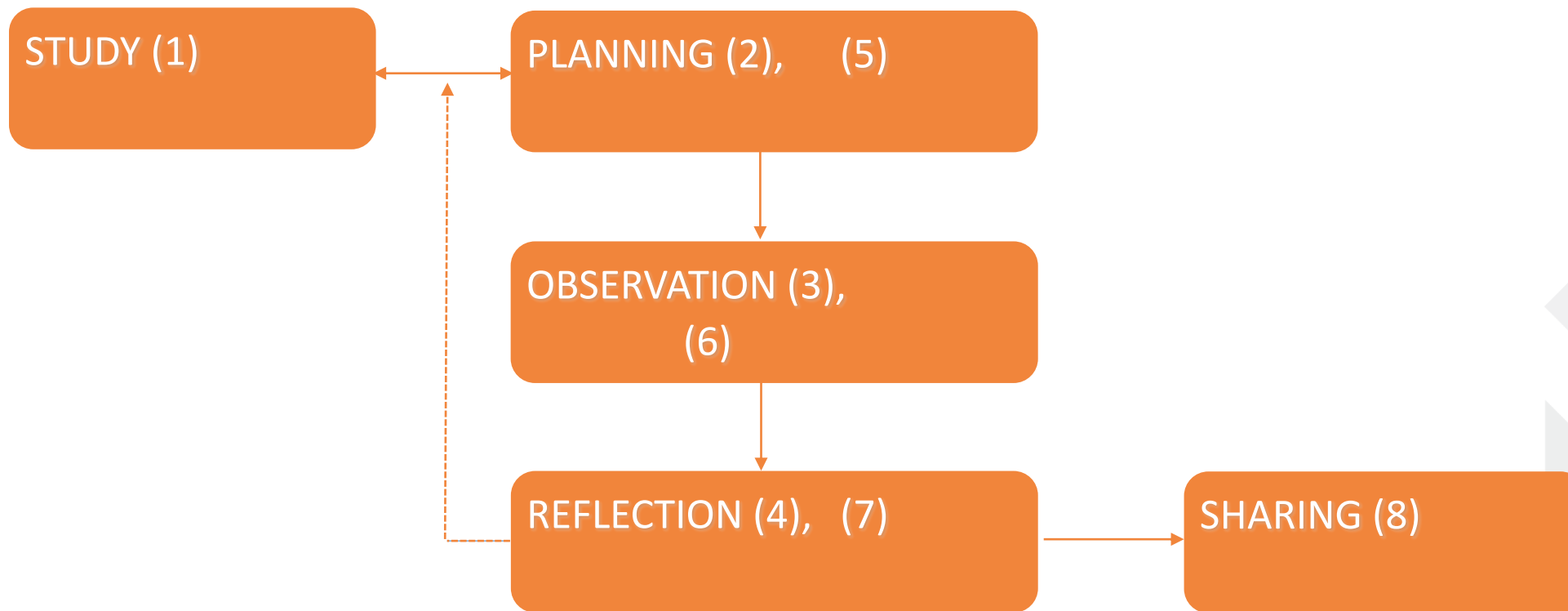
CILJ STUDIJE NASTAVNOG SATA



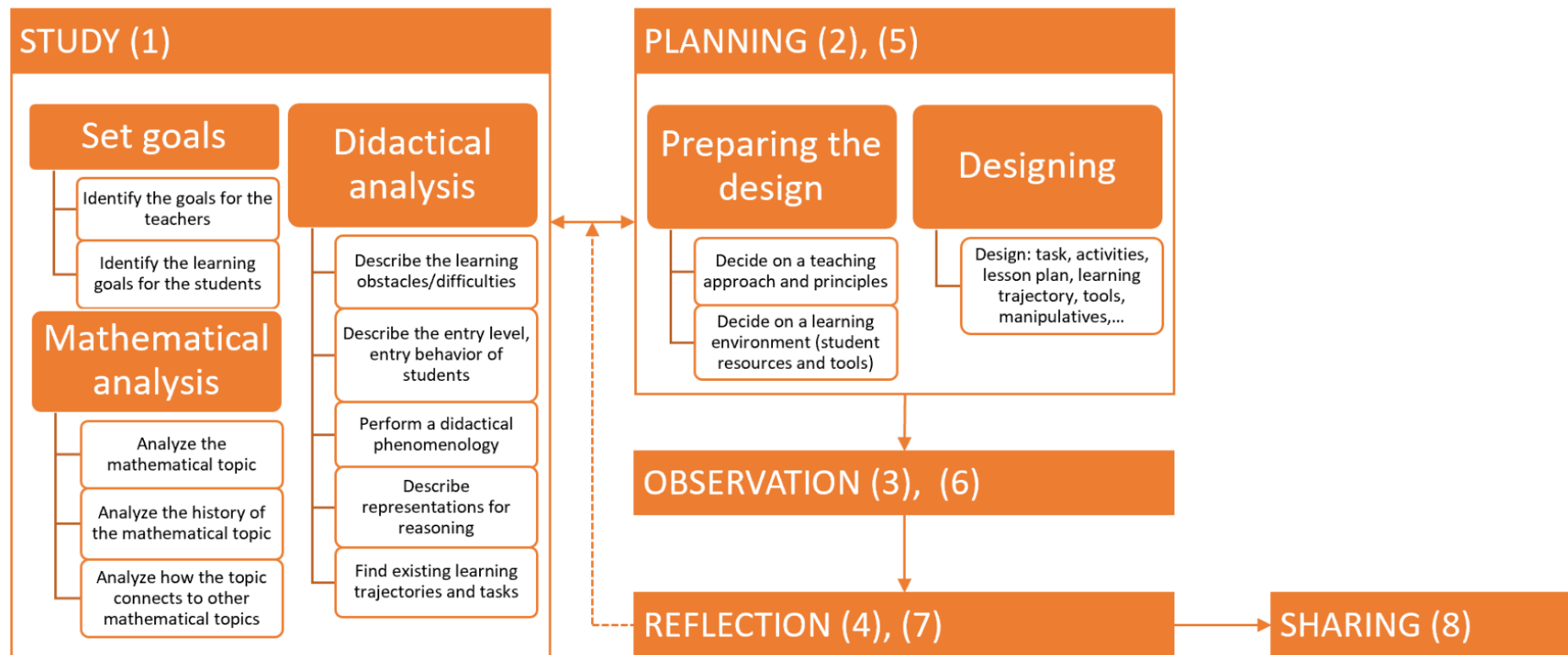
Kroz studiju nastavnog sata želimo naučiti nešto kao nastavnici koji istražuju; ne samo što i kako učenici uče na pojedinom nastavnom satu, već općenitije na koji način principi dizajna oblikuju nastavni sat!



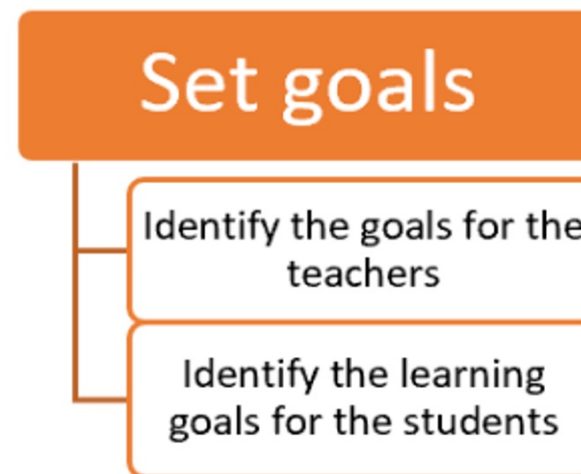
STUDIJA NASTAVNOG SATA



ANALIZA I PLANIRANJE NASTAVNOG SATA



RADIONICA



Unutar svoje grupe odaberite jednu temu o kojoj ćete razgovarati u nizu aktivnosti.

AKTIVNOST 1: Postavite cilj svog istraživanja – jasno razlučite **ciljeve nastavnika** (studije nastavnog sata) i **ciljeve učenika** (nastavnog sata)



RADIONICA

Didactical analysis

Describe the learning obstacles/difficulties



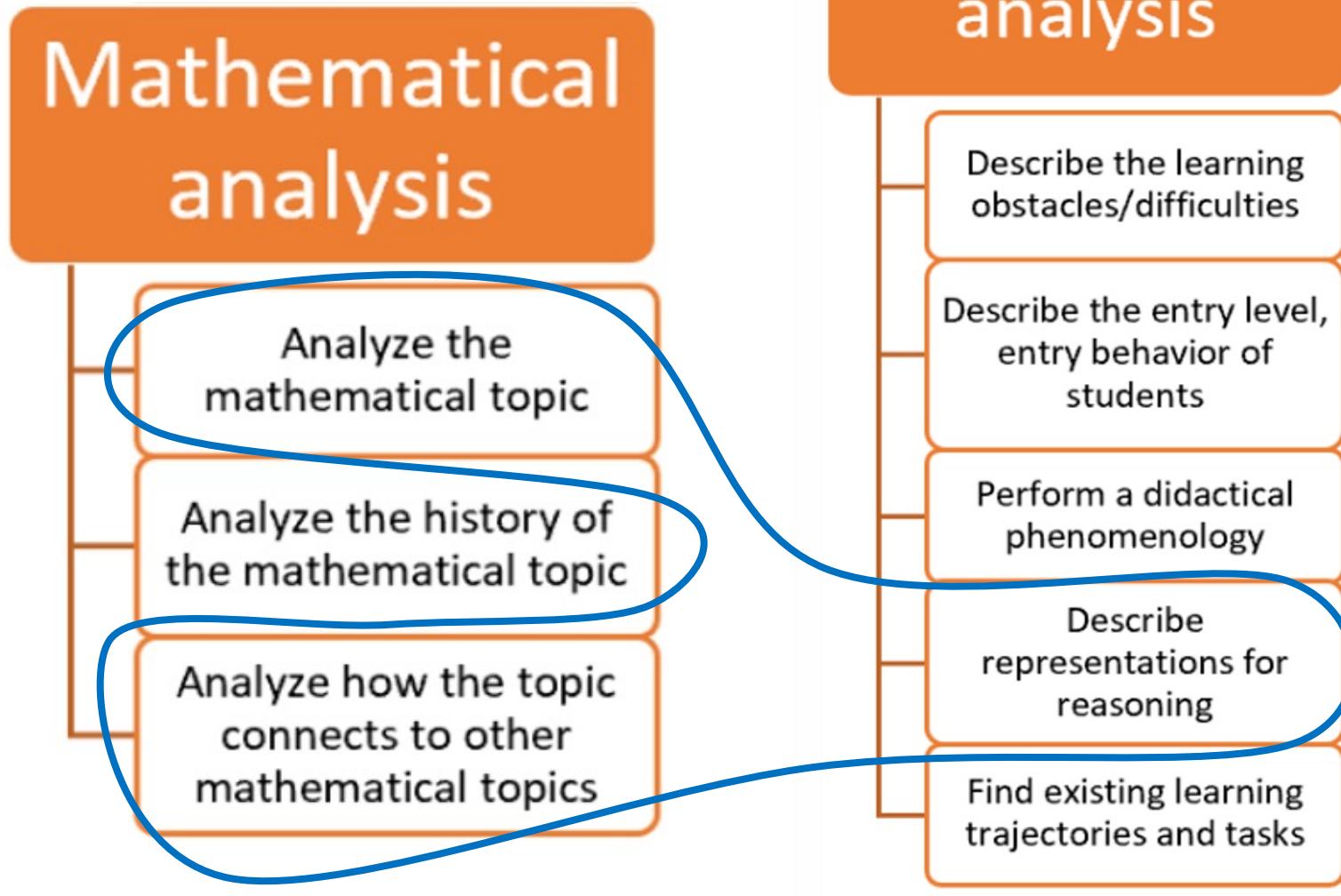
Unutar svoje grupe odaberite jednu temu o kojoj ćete razgovarati u nizu aktivnosti.

AKTIVNOST 1: Postavite cilj svog istraživanja – jasno razlučite ciljeve nastavnika (studije nastavnog sata) i ciljeve učenika (nastavnog sata)

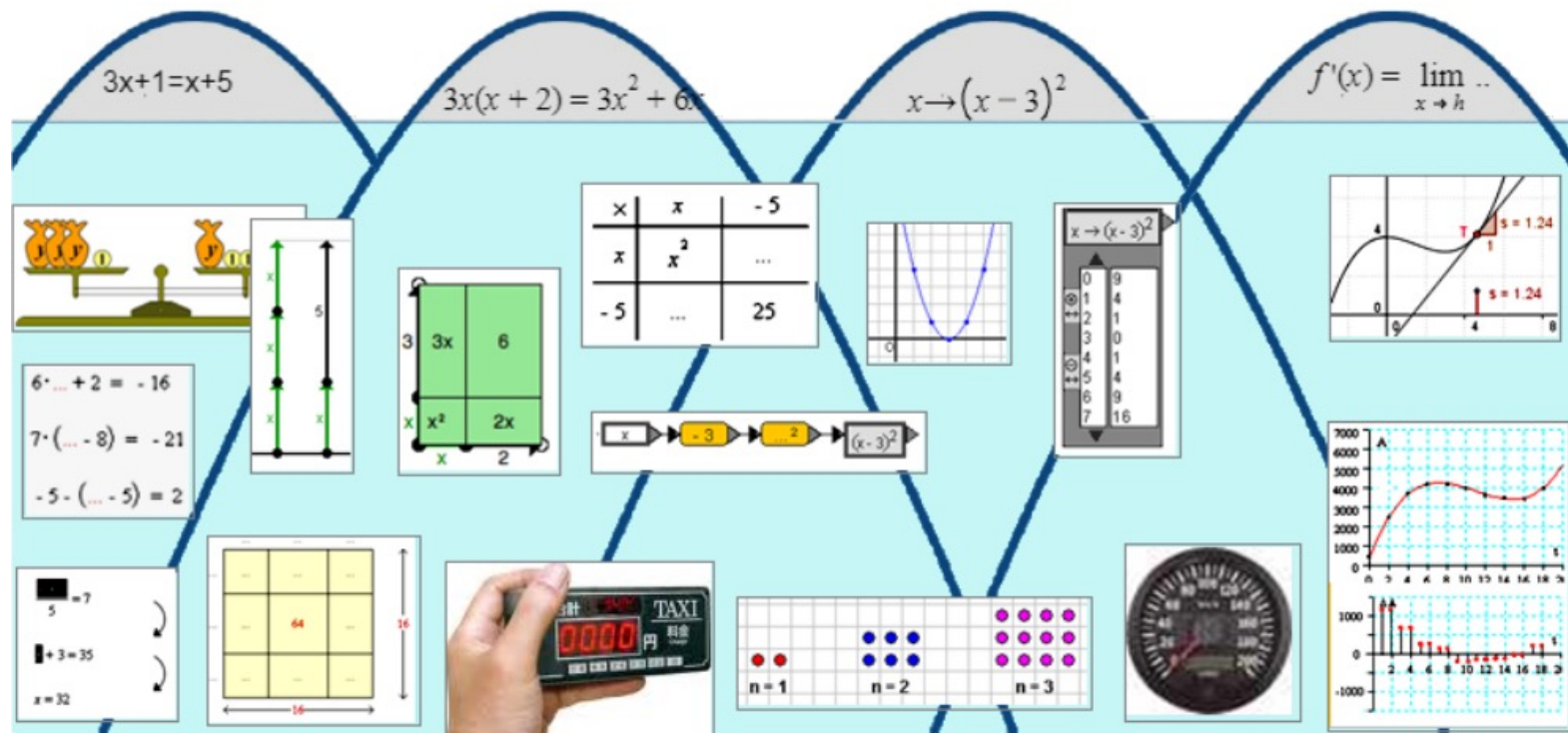
AKTIVNOST 2: Opišite **učeničke poteškoće** koje želite adresirati



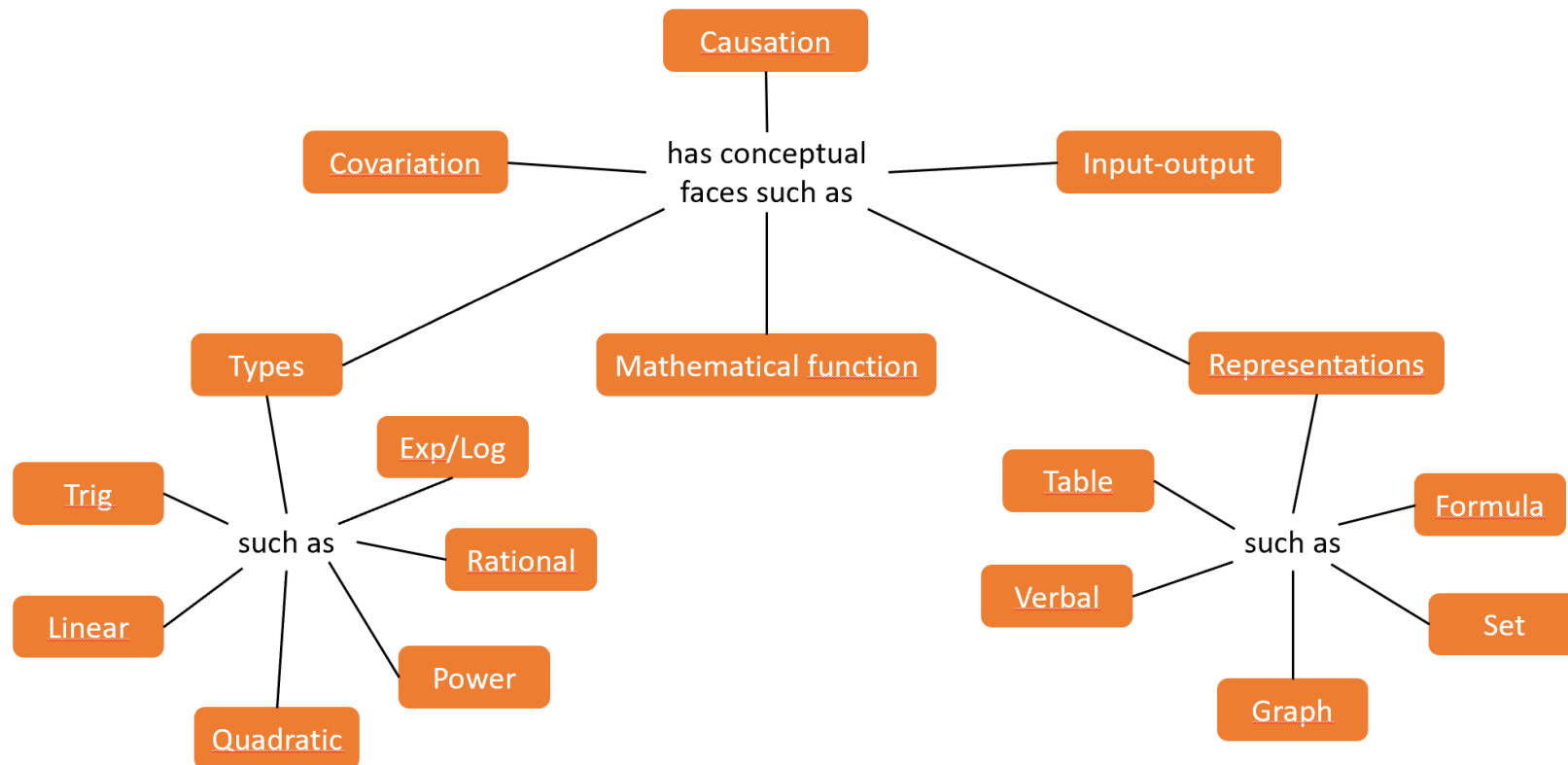
ANALIZA



MATEMATIČKA I DIDAKTIČKA ANALIZA



MATEMATIČKA I DIDAKTIČKA ANALIZA



RADIONICA



Unutar svoje grupe odaberite jednu temu o kojoj ćete razgovarati u nizu aktivnosti.

AKTIVNOST 1: Postavite cilj svog istraživanja – jasno razlučite ciljeve nastavnika (studije nastavnog sata) i ciljeve učenika (nastavnog sata)

AKTIVNOST 2: Opišite učeničke poteškoće koje želite adresirati

AKTIVNOST 3: Izradite 'ledenjak' ili **konceptualnu mapu** za temeljni koncept Vaše teme



TIME scenarij - Linearna regresija

Ciljano znanje	Argumentacija odabira linearnog modela koji opisuje diskretan skup podataka u dvije varijable	
Širi ciljevi	Razvoj matematičkog jezika i korištenje različitih reprezentacija Interpretacija i odabir primjerene grafičke reprezentacije Rješavanje realističnih problema	
Potrebno matematičko predznanje	Crtanje točaka u Kartezijevom koordinatnom sustavu u ravnini Linearna funkcija i njen graf	
Razred/uzrast	3. razred, 16 - 17 godina	
Vrijeme	60 minuta	
Nastavna sredstva	Ploča, nastavni listić, računala, A3 papiri, flomasteri, magneti	
Problem: U tablici su navedeni rezultati mjerenja koji opisuju frekvenciju kojom cvrčci cvrče na određenoj temperaturi. Da biste predvidjeli frekvenciju na proizvoljnoj temperaturi odredite linearni model koji po vama (najbolje) prikazuje ovisnost frekvencije cvrčanja o temperaturi. Argumentirajte zašto ste odabrali upravo taj linearni model.		
		
	Djelovanje nastavnika	Djelovanje učenika
Devolucija (didaktički) 5 minuta	Nastavnik dijeli učenike u grupe po tri i svakoj grupi daje nastavni listić s problemom. Nastavnik prezentira problem i daje upute za rad u kojima ističe da učenici trebaju pripremiti kratko predstavljanje svog rada za ostatak razreda.	Učenici slušaju i prate upute nastavnika, te postavljaju pitanja ako im nešto nije jasno. Pripremaju papir, računalo i bilo koji drugi pribor koji smatraju da će im koristiti.
Djelovanje (adidaktički) 30 minuta	Nastavnik obilazi učenike, promatra njihov rad, te bilježi strategije koje učenici koriste. Na temelju uvida u strategije, priprema poredak kojim će prozivati grupe u sljedećoj fazi. Ako neki učenici koriste postojeće naredbe nekog od digitalnih alata kako bi dobili pravac regresije („best fit“), nastavnik postavlja pitanje što misle kako računalo računa taj pravac i kako bi sami izračunali koeficijente.	Učenici čitaju problem i analiziraju podatke. Neki učenici će crtati na papiru, a neki uz pomoć računala. Očekuje se da će neki učenici koji koriste računala koristiti naredbe za određivanje pravca regresije. Različite strategije koje se očekuju da bi učenici mogli imati opisane su na kraju scenarija.
Formulacija (adidaktički) 10 minuta	Nastavnik proziva grupe i crta pravce za svaku grupu koristeći Geogebra. Nakon ucrtavanja skriva pravac, ali ga ne briše. Nastavnik ne komentira učenička rješenja u ovoj fazi.	Po jedan učenik iz svake grupe iznosi argumentaciju kako su i zašto odabrali linearni model. Svaka prezentacija traje nekoliko minuta, a drugi učenici mogu postavljati pitanja.

Validacija (didaktički) 10 minuta	Nastavnik u Geogebri prikazuje sve pravce koje su učenici predložili te dodaje pravac koji je dobiven metodom najmanjih kvadrata. Poziva učenike da diskutiraju kako se razlikuju predviđanja frekvencije za određenu temperaturu (npr. za 38 °C) i da argumentiraju koji od pravaca smatraju „najboljim“.	Učenici sudjeluju u diskusiji. Uspoređuju vrijednosti frekvencija u različitim modelima i iznose svoja razmišljanja o „pravoj vrijednosti“. Promatrajući sve pravce promišljaju o značenju „najboljeg“ linearnog modela i iznose svoje zaključke.
Institucionalizacija (didaktički) 5 minuta	Nastavnik sažima argumente koje su učenici iznijeli tijekom sata i stavlja naglasak na različite strategije kojima su učenici birali linearni model. Govori da je linearni model koji je prikazan u prethodnoj fazi dobiven <i>metodom najmanjih kvadrata</i> i da je osnova te metode minimizirati zbroj kvadrata razlika između eksperimentalnih i teorijskih vrijednosti. Najavljuje da će to biti tema nekog od idućih sati. Nastavnik moli učenike za anonimnu povratnu informaciju: Što ste naučili? Koja pitanja su vam se otvorila?	Učenici zapisuju zaključke i postavljaju nova pitanja koja će nastavnik možda odgovoriti na nekom od idućih sati. Učenici odgovaraju na pitanja na papir ili putem obrasca na računalu.
Mogući načini da učenici ostvare ciljano znanje	U fazi djelovanja učenici bi mogli: - definirati parametre za nagib i odsječak na ordinati a zatim mijenjajući parametre odabrati pravac - odrediti jednadžbu pravca kroz dvije točke – pritom su mogući razni odabiri tih točaka: - točka s najmanjom temperaturom i točka s najvećom temperaturom - točka kojoj su koordinate aritmetička sredina temperatura i aritmetička sredina frekvencija cvrčanja te jedna nasumično odabrana točka - točka kojoj su koordinate aritmetička sredina temperatura i aritmetička sredina frekvencija cvrčanja te točka kojoj su koordinate aritmetička sredina najmanje i najveće temperature i aritmetička sredina najmanje i najveće frekvencije cvrčanja - dvije točke za koje vjeruju da najbolje opisuju dani skup podataka - dvije nasumično odabrane točke - odrediti točku kojoj su koordinate aritmetička sredina temperatura i aritmetička sredina frekvencija cvrčanja a zatim definirati parametar za nagib te mijenjajući parametar odabrati pravac - odrediti jednadžbe pravaca kroz sve moguće parove točaka a zatim nagib odrediti kao aritmetičku sredinu svih tih nagiba te odsječak na ordinati kao aritmetičku sredinu svih dobivenih odsječaka na ordinati - nacrtati pravac regresije koristeći postojeću naredbu nekog od digitalnih alata	

PRIMJERI UČENIČKIH MODELA



Napomena: na apscisi je frekvencija cvrčanja, a na ordinati temperatura u °F.

PRIMJERI ARGUMENTACIJE UČENIKA

- prolazi kroz najveći broj točaka
- najbliži je svim točkama
- greška je najmanja
- zbroj udaljenosti od točaka do pravca je najmanji
- zbroj razlika između izmjerenih i teorijskih podataka je najmanji
- zbroj udaljenosti između izmjerenih i teorijskih podataka je najmanji
- izračunalo ga je računalo

Buduća istraživanja	Nakon ovog uvoda slijedi teorija o matematici koja stoji iza linearne regresije (temeljena na metodi najmanjih kvadrata). Od učenika se ne očekuje da ove izračune rade ručno, već da razumiju kako se to radi. Zatim trebaju naučiti koristiti računalo za izračunavanje pravca regresije i igrati se s podacima kako bi vidjeli da izostavljanje nekih podataka može značajno promijeniti funkciju. Ova tema nadilazi predmet matematike, pa očekujemo od učenika da ovo znanje koriste u fizici, kemiji i biologiji.
Popis dodatnih materijala	Nastavni listić

I cvrči, cvrči cvrčak na čvoru crne smrče

Svoj trohej zaglušljivi, svoj zvučni, teški jamb.

Podne je. - Kao voda tišinom razl'jeva se

Sunčani ditiramb.

(...)

Vladimir Nazor



Cvrčci stvaraju zvuk kojim se glasaju brzim struganjem krila jednog preko drugog. Pierce (1948) je mehanički izmjerio frekvenciju cvrkuta cvrčka (broj vibracija krila u sekundi) pri različitim temperaturama. Budući da su cvrčci hladnokrvni, na brzinu njihovih fizioloških procesa i njihov ukupni metabolizam utječe temperatura. Stoga postoji razlog da se vjeruje da bi temperatura imala veliki utjecaj na njihovo ponašanje, poput frekvencije cvrkutanja. Općenito je utvrđeno da cvrčci nisu pjevali na temperaturama hladnijim od 15 °C niti toplijim od 38 °C.

Evo rezultata Pierceovih mjerenja:

Temperatura (°C)	Broj cvrkuta u sekundi
31.4	20.0
22.0	16.0
34.1	19.8
29.1	18.4
27.0	17.1
24.0	15.5
20.9	14.7
22.0	15.7
20.8	15.4
28.5	16.3
26.4	15.0
28.1	17.2
27.0	16.0
28.6	17.0
24.6	14.4

Prikažite ove podatke linearnim modelom.

Pripremite kratko predstavljanje vašeg modela u kojem ćete nam reći koju linearnu funkciju ste odabrali te kako ste do nje došli. **Objasnite matematičku pozadinu vašeg modela te argumentirajte zašto taj model smatrate najboljim linearnim modelom.**